Pracovní úkol

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
3. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického.

Teoretická část

Libovolné těleso můžeme nechat kývat v tíhovém poli Země kolem osy, která neprochází těžištěm tělesa, jako fyzické kyvadlo. Doba kmitu fyzického kyvadla je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \tag{1}$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, m hmotnost kyvadla g místní tíhové zrychlení, d vzdálenost těžiště od osy otáčení a α maximální úhlová výchylka těžiště z rovnovážné polohy.

Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod o hmotnosti m umístěný na jednom konci nehmotného vlákna délky l volně otáčivého kolem osy, která prochází jeho druhým koncem. Pro dobu kmitu matematického kyvadla při malých výchylkách pak platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2}$$

Místní tíhové zrychlení měřené matematickým kyvadlem tedy vypočítáme podle vztahu

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \tag{I}$$

Matematické kyvadlo se realizuje těžkou koulí zavěšenou na niti. Pro výpočet chyby způsobené aproximací potřebujeme znát moment setrvačnosti tohoto fyzického kyvadla

$$I = m_k\left(\frac{2}{5}r^2 + (L+r)^2\right) + \frac{1}{3}m_l L^2, \tag{3}$$

kde m_k je hmotnost koule, m_l hmotnost nitě, L délka nitě a r poloměr nitě. Dále zřejmě platí

$$m = m_k + m_l$$

$$d = \frac{m_l\frac{L}{2} + m_k(L+r)}{m_k + m_l}. \tag{4}$$

Reverzní kyvadlo kývá se stejnou dobou kmitu kolem dvou rovnoběžných os vzdálených o redukovanou délku kyvadla l_r. Pro dobu jeho kmitu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}. \tag{5}$$

V tomto měření používáme jako kyvadlo tyč s dvěma břity a ocelovou čočkou na jednom konci, kterou je potřeba pevně umístit do takové polohy, aby byla doba kmitu stejná pro kmitání s osou v obou břitech. Tuto polohu nalezneme pomocí grafické interpolace dvou náhodně zvolených poloh čočky.

Místní tíhové zrychlení měřené reverzním kyvadlem je

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2}. \tag{II}$$

Některé veličiny (perioda kmitů) byly měřeny opakovaně, a proto je pro stanovení jejich odchylky od aritmetického průměru využit vztah podle [2]

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\mu_x - x_i)^2}. \tag{6}$$

Odchylku tíhového zrychlení vypočítáme vztahem sestaveným podle [2]

$$\Delta g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \left(\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T} \right). \tag{7}$$

Měření

Nejprve bylo potřeba nastavit kyvadlo tak, aby splňovalo podmínky pro reverzní kyvadlo. V tabulce 3 a grafech 1 a 2 jsou uvedeny hodnoty naměřené při tomto nastavování. Vzdálenost čočky l_c je měřena vzhledem ke zvolenému referenčnímu bodu na kyvadle (hrana jednoho břitu). V grafech 1 a 2 jsou uvedeny rovněž regresní přímky, pomocí kterých lze také určit dobu kmitu reverzního kyvadla.

V tabulce 1 jsou uvedeny naměřené hodnoty pro reverzní kyvadlo. Doba jeho kmitu použitá při výpočtu místního tíhového zrychlení je vypočítána aritmetickým průměrem všech naměřených hodnot délky kmitu.

$\frac{T_{\text{dole}}}{\text{s}}$	$\frac{T_{\text{nahoře}}}{\text{s}}$
2.00451	2.00422
2.00468	2.00415
2.00470	2.00418
2.00466	2.00417
2.00469	2.00415

Veličina	$\frac{T}{\text{s}}$	$\frac{l_r}{\text{m}}$
Průměr	2.004411	0.995
Odchylka	$8.094511 \cdot 10^{-5}$	0.001

Tabulka 1.: Naměřené a vypočítané hodnoty pro reverzní kyvadlo

$\frac{T}{\mathrm{s}}$
2.01599
2.01615
2.01608
2.01595
2.01631

Veličina	$\frac{T}{\mathrm{s}}$	$\frac{l_l}{\mathrm{cm}}$	$\frac{h}{\mathrm{cm}}$	$\frac{d_k}{\mathrm{cm}}$	$\frac{m_k}{\mathrm{g}}$	$\frac{m_l}{\mathrm{g}}$
Průměr	2.016096	98.9	0.87	2.33	55.5320	0.1316
Odchylka	$6.384356 \cdot 10^{-5}$	0.1	0.01	0.01	0.0002	0.0001

Tabulka 2.: Naměřené a vypočítané hodnoty pro matematické kyvadlo

Naměřené parametry matematického kyvadla jsou shrnuty v tabulce 2. Jednotlivé veličiny mají tento význam: d_k je průměr koule, l_l je délka nitě, h je délka háčku, pomocí kterého je koule připevněna k niti, m_k je hmotnost koule včetně háčku a m_l je hmotnost nitě.

Délka závěsu matematického kyvadla je pro naměřené veličiny

$$l = l_l + h + \frac{d_k}{2}.$$

Pro výpočet momentu setrvačnosti tohoto kyvadla použijeme následující rovnosti

$$L = l_l + h$$

$$r = \frac{d_k}{2}$$

Aproximujeme-li toto kyvadlo jako hmotný bod zavěšený na nehmotném vlákně, vypočítáme memoment setrvačnosti $I_m = 0.056051\,\mathrm{kg\,m^2}$, pro fyzické kyvadlo podle vzorce (3) je $I_f = 0.056622\,\mathrm{kg\,m^2}$, což se liší přibližně o 1 %. Chyba tíhového zrychlení způsobená aproximací matematickým kyvadlem je tedy přibližně 0.5 % (protože ve výpočtu se moment setrvačnosti nachází pod odmocninou).

Metoda	Hodnota
Reverzní kyvadlo	$(9.777 \pm 0.011)\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Matematické kyvadlo	$(9.803 \pm 0.012)\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Tabulka 4.: Vypočítané hodnoty místního tíhového zrychlení

$\frac{l_c}{\mathrm{m}}$	$\frac{T_{\mathrm{dole}}}{\mathrm{s}}$	$\frac{T_{\mathrm{nahoře}}}{\mathrm{s}}$
0.0500	1.98789	1.91103
0.0728	2.00610	2.01541
0.0726	2.00616	2.01522
0.0710	2.00467	2.00633
0.0712	2.00517	2.00764
0.0713	2.00521	2.00796
0.0708	2.00489	2.00625
0.0705	2.00456	2.00519
0.07045	2.00449	2.00414
0.0703	2.00430	2.00334
0.07035	2.00465	2.00417

Tabulka 3.: Naměřené hodnoty pro nastavení reverzního kyvadla

Diskuze

Tabulky [3] uvádějí místní tíhové zrychlení v Praze $g = 9.810769\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Naměřené hodnoty jsou blízké tomuto údaji. Je překvapivé, že měření pomocí matematického kyvadla se liší méně než reverzní kyvadlo, v jehož případě tabulková hodnota leží dokonce mimo oblast ohraničenou odchylkou. Očekával jsem právě opačný výsledek. Při pohledu na tabulku naměřených časů pro reverzní kyvadlo je zřejmé, že by bylo možné nastavit jej ještě přesněji. Vzhledem k tomu, že jsem provedl poměrně velké množství měření pro různé polohy ocelové čočky na kyvadle, pokusil jsem se odhadnout dobu kmitu reverzního kyvadla pomocí lineárních regresí, které jsou uvedeny v grafech 1 a 2. Perioda, která odpovídá jejich průsečíku, je $T = 2.004467\,\mathrm{s}$, což dostatečně přesně odpovídá hodnotě určené v tabulce 1. Použijeme-li tuto hodnotu k výpočtu k výpočtu místního tíhového zrychlení, dostaneme stejný výsledek v rámci uváděného počtu platných míst. Z toho je zřejmé, že kyvadlo bylo dostatečně dobře nastaveno — chybu je třeba hledat někde jinde, necméně žádné uspokojivé vysvětlení se mi nepodařilo najít.

Výpočet momentu setrvačnosti fyzického kyvadla potvrdil při porovnání s momentem setrvačnosti matematického kyvadla, že tato aproximace je oprávněná a nezpůsobuje větší chybu (0.5 %) než je statistická (1 %). Tento fakt pochopitelně přispěl k velmi dobrému výsledku tohoto měření.

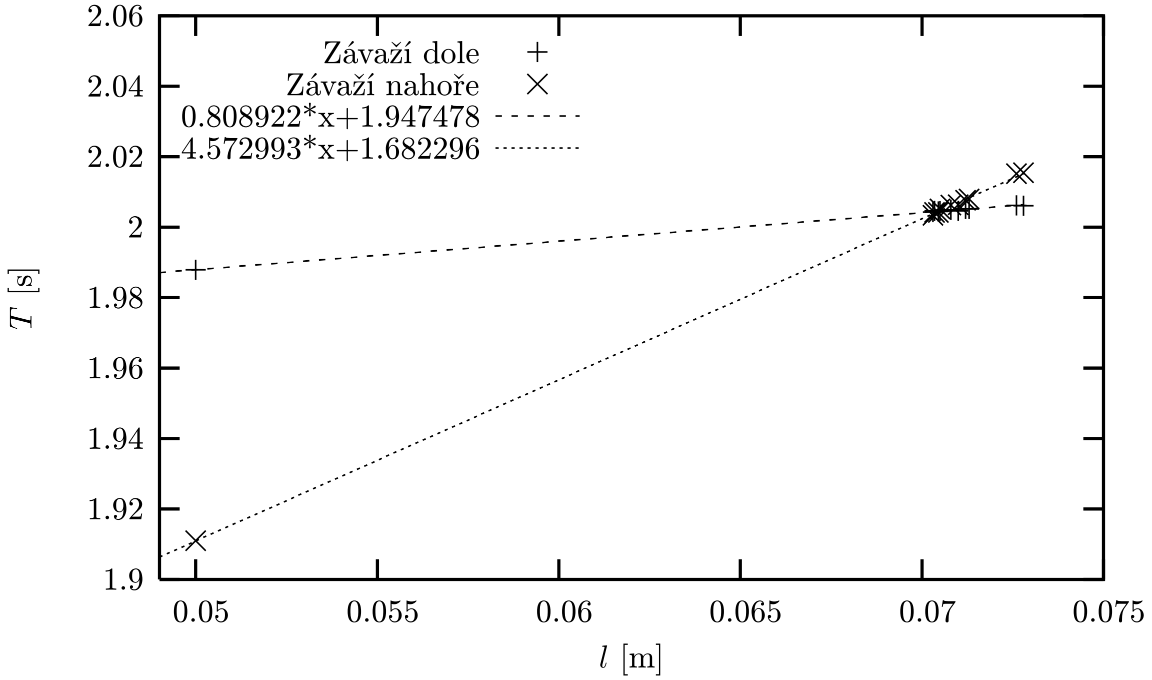
Závěr

Výsledky měření místního tíhového zrychlení jsou uvedeny v tabulce 4. Měření pomocí matematického kyvadla považuji za úspěšné, při metodě reverzního kyvadla zřejmě došlo k chybě, kterou se mi nepodařilo uspokojivě vysvětlit.

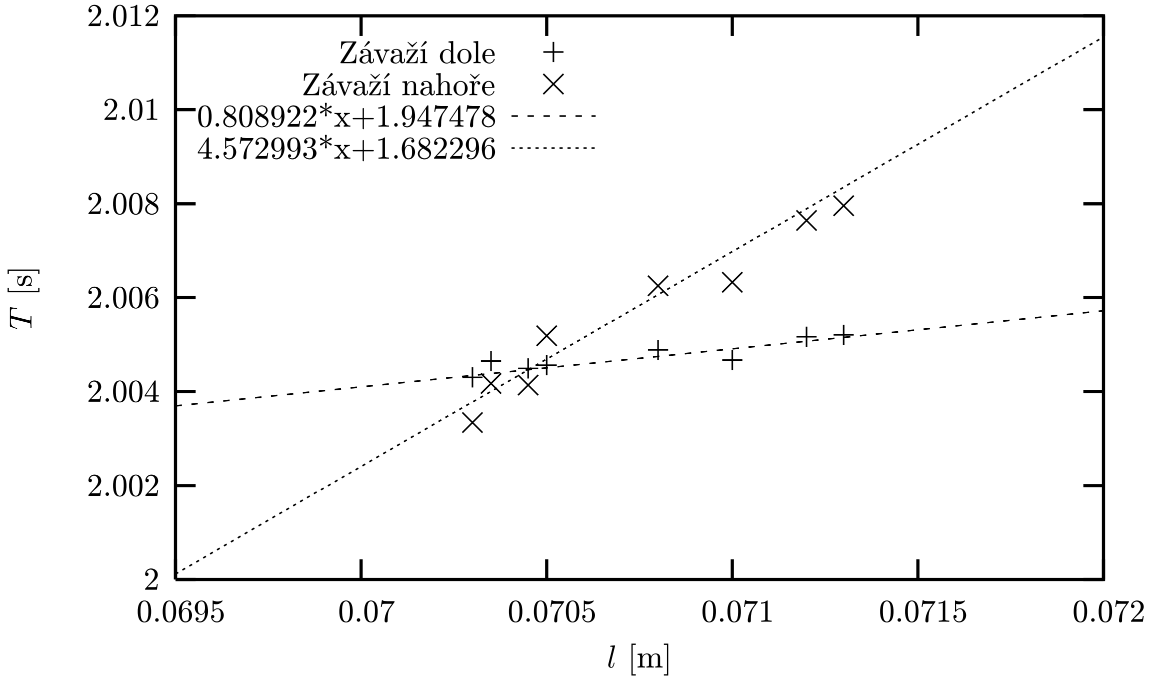
Literatura

[1] Studijní texty, úloha XXI. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/`
[2] Englich, J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření. Praha 2000.
[3] Brož, J., Roskovec, V., Valouch, M.: Fyzikální a matematické tabulky. SNTL, Praha 1980.

Příloha: grafy



Graf 1.: Závislost doby kmitu kyvadla na vzdálenosti čočky od vztažného bodu



Graf 2.: Závislost doby kmitu kyvadla na vzdálenosti čočky od vztažného bodu — detail grafu 1