Vojtěch Hrubý Úloha XVII

Úkol

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádru v souřadná soustavě dané hlavními osami setrvačnosti
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádru vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu.

Teoretická část

Moment setrvačnosti tělesa lze měřit metodou torzních kmitů. Těleso je zavěšeno na ocelovém drátě v bodě ležícím na ose, vzhledem ke které jej měříme, a ta také prochází těžištěm tělesa. Po vychýlení z rovnovážné polohy těleso kmitá s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}},$$

kde I je příslušný moment setrvačnosti a D je direkční moment vlákna, který lze určit pomocí tělesa, jehož moment setrvačnosti vypočítáme z jeho parametrů. Moment setrvačnosti zkoumaného tělesa potom je

$$I = \frac{T^2}{T_T^2} I_T,$$

kde T_T a I_T náleží referenčnímu tělesu. Jako referenční těleso dobře poslouží ocelový válec o průměru D_v a hmotnosti m, jehož moment setrvačnosti je

$$I_v = \frac{1}{2} m_v \frac{D_v^2}{4}$$

a periodu jeho kmitů T_v změříme přímo.

Délky hran kvádru jsou označeny a, b a c. Zadaná obecná osa rotace u je znázorněna na obrázku 1. Jednotkový vektor ve směru u je

$$v_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad v_y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad v_z = 0.$$

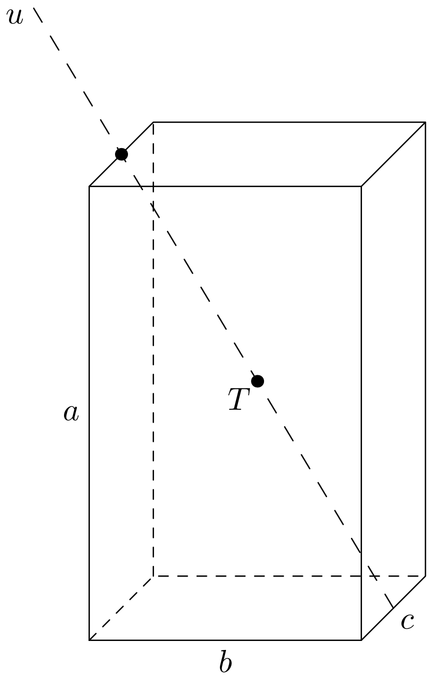
Odchylka souřadnice v_x jednotkového vektoru se vypočítá vzorcem podle [2]

$$\Delta v_x = \left(\frac{\Delta a \cdot a + \Delta b \cdot b}{a^2+b^2} + \frac{\Delta a}{a} \right) v_x,$$

pro v_y se použije analogický vzorec.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose u na obrázku 1 je

$$I_u = \frac{a^2 I_a + b^2 I_b}{a^2+b^2}$$



Obrázek 1.: Poloha osy u v kvádru

a odchylka, která je sestavená podle pravidel v [2], je počítána podle vzorce

$$\Delta I_u = I \cdot \left(\frac{2\Delta a \cdot a + 2\Delta b \cdot b}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 I_a \left(2\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta I_a}{I_a}\right) + b^2 I_b \left(2\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta I_b}{I_b}\right)}{a^2 I_a + b^2 I_b} \right)$$

Pro ověření Steinerovy věty ($I_0 = I - md^2$) budeme požadovat, aby se shodoval moment setrvačnosti určený kýváním tyče podle osy procházející mimo těžiště posunutý do něj pomocí Steinerovy věty s hodnotou naměřenou torzními kmity.

Moment setrvačnosti tyče měřený kýváním I_{0k} vzhledem k ose procházejí těžištěm určíme pomocí Steinerovy věty a vztahu pro periodu fyzického kyvadla

$$I_{0k} = \frac{T^2}{4\pi^2} mgd - md^2,$$

kde T je doba kmitu podél osy ve vzdálenosti $d = l_t/2$ od těžiště a $m = m_t$ je hmotnost tyče. Odchylka této veličiny je vypočítáne podle vztahu

$$\Delta I_{0k} = \left(2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta l_t}{l_t}\right) \frac{T^2}{4\pi^2} mg \frac{l_t}{2} + \left(\frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta l_t}{l_t}\right) m \frac{l_t^2}{4}$$

Momement setrvačnosti tyče I_{0t} (vzhledem k ose procházející těžištěm) se určí pomocí metody torzních kmitů stejným způsobem jako v případě kvádru.

Měření

Pro zvýšení přesnosti měření periody kmitů jsem vždy měřil více kmitů. Počet měřených kmitů je v tabulce 1 uváděn jako faktor f, hodnota T je jíž skutečná perioda (tedy po vydělení f). Za chybu měření periody považuji svou reakční dobu, kterou odhaduji

	f	$T_1 \cdot f$ [s]	$T_2 \cdot f$ [s]	$\Delta T \cdot f$ [s]	T [s]	ΔT [s]
Válec T_v	5	50.98	50.86	0.3	10.18	0.06
Kvádr T_c	5	54.45	54.44	0.3	10.89	0.06
Kvádr T_b	5	48.97	48.85	0.3	9.78	0.06
Kvádr T_a	5	26.65	26.67	0.3	5.33	0.06
Kvádr T_u	5	32.69	32.63	0.3	6.53	0.06
Tyč (torze) T_t	5	73.62	73.19	0.3	14.68	0.06
Tyč (kývání) T_k	20	18.80	18.82	0.3	0.94	0.02

Tabulka 1.: Naměřené periody kmitů

		x [cm]	Δx [cm]
Kvádr	a	12.78	0.05
	b	6.42	0.05
	c	1.900	0.005
Průměr válce	D_v	10.80	0.05
Tyč	l_t	31.2	0.1

Tabulka 2.: Rozměry použitých těles

0.3 s. Každé měření bylo pro kontrolu provedeno dvakrát (T_1 a T_2), hodnota T je pak vypočítána aritmetickým průměrem.

V tabulce 2 uvádím naměřené hodnoty rozměrů zkoumaných těles. Byly naměřeny posuvným měřítkem (a, b, a D_v), mikrometrem (c) a pásovým svinovacím měřítkem (l_t).

Tabulka 3 obsahuje naměřené hmotnosti všech studovaných těles. Všechny jsou naměřeny pomocí laboratorních nebržděných vah.

		x [kg]	Δx [kg]
Hmotnost válce	m_v	0.9026	0.0001
Hmotnost tyče	m_t	0.2817	0.0001
Hmotnost kvádru	m_k	1.0730	0.0005

Tabulka 3.: Hmotnosti použitých těles

Složky hledaného jednotkového vektoru jsou

$$v_x = (0.894 \pm 0.004), \qquad v_y = (0.449 \pm 0.002), \qquad v_z = 0$$

Moment setrvačnosti válce je

$$I_v = (1.316 \pm 0.006) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k jednotlivým osám jsou (I_a je moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné se stranou a a procházející těžištěm a podobně)

$$I_a = (0.36 \pm 0.01) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

$$I_b = (1.21 \pm 0.03) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

$$I_c = (1.50 \pm 0.04) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose u vypočítaný z těchto hodnot a ze směrového vektoru je

$$I_u = (0.54 \pm 0.02) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k též ose měřený přímo metodou torzních kmitů je

$$I_u = (0.53 \pm 0.02) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející těžištěm měřený metodou kývání je

$$I_{0k} = (2.80 \pm 0.08) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2},$$

metodou torzních kmitů

$$I_{0t} = (2.73 \pm 0.07) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Teplota	23.8 °C
Tlak vzduchu	993.6 hPa
Relativní vlhkost	38.9 %

Tabulka 4.: Podmínky v laboratoři v době měření

Diskuze

Moment setrvačnosti kvádru vzhledem ose u určily obě metody shodně v rámci odchylky.

Měření za účelem ověření Steinerovy věty přineslo výsledky, které se liší více, intervaly odchylek se však překrývají dostatečně. Může to být způsobeno nedostatečným určením parametru d, který byl vypočítán jako poloviční vzdálenost břitů na tyči l_t, které by měly být ve stejné vzdálenosti od těžiště. Tuto skutečnosti jsem však přímo neověřil.

Závěr

Momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k hlavním osám jsou

$$I_a = (0.36 \pm 0.01) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$
$$I_b = (1.21 \pm 0.03) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$
$$I_c = (1.50 \pm 0.04) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Složky jednotkového vektoru ve směru u jsou

$$v_x = (0.894 \pm 0.004), \qquad v_y = (0.449 \pm 0.002), \qquad v_z = 0$$

Moment setrvačnosti kvádru vzhledem k ose u je

$$I_u = (0.54 \pm 0.02) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} \qquad \text{metodou kývání,}$$
$$I_u = (0.53 \pm 0.02) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} \qquad \text{metodou torzních kmitů.}$$

Steinerovu větu se podařilo úspěšně ověřit.

Literatura

[1] Studijní texty, úloha XVII. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/`

[2] Englich, J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření. Praha 2000.