Vojtěch Hrubý, F17 Úloha XIII

Pracovní úkol

1. Změřte moment setrvačnosti kola metodou kyvů
2. Změřte moment setrvačnosti kola metodou otáčení pro různé hodnoty parametru α. Graficky znázorněte závislost $\omega = \omega(t)$ pro tři odlišné hodnoty parametru α.
3. Určete moment třecích sil M_t a moment setrvačnosti kola I_k korigovaný na nulovou hodnotu tření.
4. Graficky znázorněnte závislost nekorigovaného momentu I^* na parametru α.

Teoretická část

Moment setrvačnosti kola byl nejprve změřen pomocí metody kyvů. Pro moment setrvačnosti pak platí

$$I = ml\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l\right),$$

kde m je hmotnost kulového závaží umístěného na obvodu kola, l je vzdálenost těžiště závaží od osy otáčení kola a T je doba kmitu kola.

Odchylka momentu setrvačnosti byla vypočítána pomocí vzorce sestaveného podle [2]

$$\Delta I = \left(\frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta l}{l}\right)ml^2 + \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta T}{T}\right)\frac{mlgT^2}{4\pi^2}.$$

Druhou metodou použitou v této úloze je otáčení. Na niti, která je navinutá na válci v ose kola, je zavěšeno závaží, které svým pádem roztáčí kolo. Proměřením parametrů tohoto pohybu získáme potřebné údaje pro výpočet momentu setrvačnosti

$$I = mr^2\left(\frac{g}{r\varepsilon} - 1\right),$$

kde m je hmotnost závaží, r je poloměr válce (měříme průměr $d_k = 2r$), ε je úhlové zrychlení kola a g je tíhové zrychlení.

Odchylku I vypočítáme

$$\Delta I = \frac{gmr}{\varepsilon}\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right) + mr^2\left(\frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta r}{r}\right).$$

Vezmeme-li v úvahu tření v soustavě, potom platí

$$I^* = I_k + \alpha M_t,$$

kde I^* je nekorigovaný moment setrvačnosti, I_k je korigovaný moment setrvačnosti a M_t je moment třecích sil a platí

$$I^* = mr^2\left(\frac{g}{r\varepsilon} - 1\right) \quad \text{a} \quad \alpha = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Hodnoty I_k a M_t určíme pomocí lieární regrese.

Ve výpočtech používám výhradně směrodatnou odchylku aritmetického průměru podle vzorce

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\mu_x - x_i)^2},$$

celková chyba veličiny, pokud je zjištěno více chyb, je dána vzorcem

$$\Delta x = \sqrt{\sum_i (\Delta x)_i^2}.$$

Měření

Naměřené hodnoty pro metodu kyvů jsou uvedeny v tabulkách 1 a 2. Doba kmitu byla měřena pětkrát, nicméně odhadnutá chyba výrazně převyšuje statistickou (za odhadnutou chybu považuji svou reační dobu, která je přibližně 0.3 s). Kmitů bylo měřeno vždy 10 pro zvýšení přesnosti měření. Tabulkách jsou již uváděny výhradně hodnoty skutečné (tedy po vydělení 10). Vzdálenost l od osy otáčení k těžišti kulového závaží je zatížena také větší chybou odhadu než je chyba měřidla, protože závaží má velmi nepravidelný tvar a polohu jeho těžiště bylo potřeba odhadnout.

Měření	1	2	3	4	5
Perioda T [s]	2.428	2.429	2.404	2.428	2.426

Tabulka 1.: Tabulka naměřených period kmitů pro metodu kyvů

Veličina	T [s]	l [m]	m [g]
Průměr	2.423	0.233	148.872
Směrodatná odchylka	0.004779		
Chyba měřidla	0.001	0.001	0.001
Odhadnutá chyba	0.03	0.005	
Celková chyba	0.03	0.005	0.001

Tabulka 2.: Tabulka hodnot potřebných pro výpočet momentu setrvačnosti metodou kyvů

Moment setrvačnosti kola měřený metodou kyvů je

$$I = (42.5 \pm 3.1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2};\ 7\,\%.$$

Pro určení momentu setrvačnosti pomocí metody otáčení bylo nutné nejprve změřit průměry kladek. Dvě menší kladky bylo možné změřit přímo, v případě dvou větších bylo potřeba změřit kladku i s okrajem a odečíst dvojnásobek výšky okraje, aby byl

Závaží	Hmotnost
1	(9.9815±0.0001) g
2	(14.9591±0.0001) g
3	(19.9119±0.0001) g
4	(29.9343±0.0001) g
5	(49.832±0.001) g

Tabulka 3.: Hmotnosti používaných závaží

Válec	Průměr
1	(5.96 ± 0.03) cm
2	(9.98 ± 0.03) cm
3	(13.93 ± 0.04) cm
4	(17.89 ± 0.04) cm

Tabulka 4.: Průměry válců

	Válec 1	Válec 2	Válec 3	Válec 4
Závaží 1	$*(0.04645 \pm 0.00081)$	$*(0.09427 \pm 0.00072)$	(0.13355 ± 0.00086)	(0.18692 ± 0.00115)
Závaží 2	$*(0.07255 \pm 0.00070)$	(0.15525 ± 0.00092)	(0.21292 ± 0.00114)	(0.28822 ± 0.00151)
Závaží 3	(0.11216 ± 0.00099)	(0.20862 ± 0.00108)	(0.29115 ± 0.00145)	(0.38891 ± 0.00184)
Závaží 4	(0.18143 ± 0.00116)	(0.31601 ± 0.00151)	(0.45556 ± 0.00211)	(0.59131 ± 0.00264)
Závaží 5	(0.31944 ± 0.00158)	(0.54385 ± 0.00250)	(0.76789 ± 0.00339)	(0.99387 ± 0.00430)

Tabulka 5.: Úhlové zrychlení $\varepsilon\,[\mathrm{s}^{-2}]$ pro všechny kombinace kladek a závaží

určen vnitřní průměr kladky. V tabulce 4 jsou uvedeny hodnoty již po této korekci. Tabulka 3 obsahuje hmotnosti závaží používaných v tomto měření.

Pomocí PC bylo naměřeno úhlové zrychlení pro všechny kombinace kladek a závaží. Tyto hodnoty uvádím v tabulkách 5 a 6. Některé hodnoty jsou zatížené příliš velkou chybou, a proto nejsou zahrnuty do dalších výpočtů. V tabulce 5 jsou označeny hvězdičkou.

Z naměřených hodnot byl vypočítán nekorigovaný moment setrvačnosti pro každé dílčí měření a z těchto hodnot byl vypočítán aritmetický průměr

$$I^* = (46.4 \pm 5.6) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}; 12\,\%.$$

Pro určení korigovaného momentu setrvačnosti a momentu třecích sil byla provedena lineární regrese

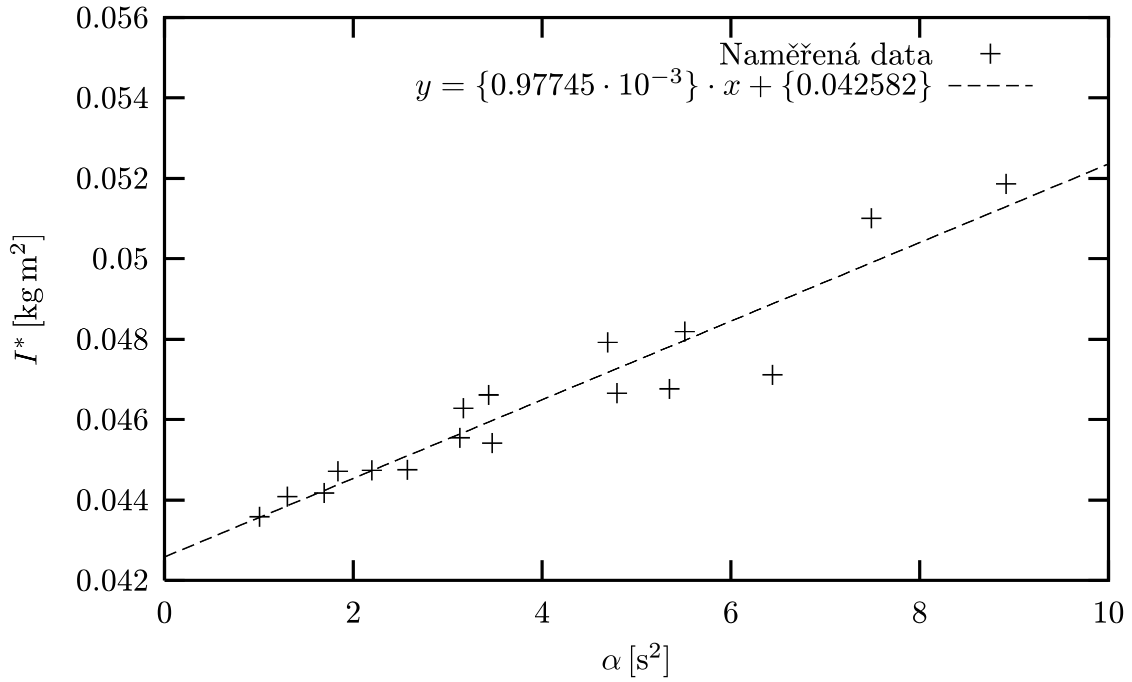
$$I^* = I_k + \alpha \cdot M_t,$$

kde

$$I_k = (42.5 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} \quad \text{a} \quad M_t = (0.977 \pm 0.082) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N\,m}.$$

m [g]	Δm [g]	d_k [mm]	Δd_k [mm]	ε [s^{-2}]	$\Delta\varepsilon$ [s^{-2}]	I^* [kg m^2]	ΔI^* [kg m^2]
9.9815	0.0001	59.6	0.3	0.04645	0.00081		
9.9815	0.0001	99.8	0.3	0.09437	0.00072		
9.9815	0.0001	139.3	0.4	0.13355	0.00086	0.051001	0.000476
9.9815	0.0001	178.9	0.4	0.18692	0.00115	0.046763	0.000394
14.9591	0.0001	59.6	0.3	0.07255	0.00070		
14.9591	0.0001	99.8	0.3	0.15525	0.00092	0.047114	0.000422
14.9591	0.0001	139.3	0.4	0.21292	0.00114	0.047915	0.000395
14.9591	0.0001	178.9	0.4	0.28822	0.00151	0.045409	0.000341
19.9119	0.0001	59.6	0.3	0.11216	0.00099	0.051864	0.000720
19.9119	0.0001	99.8	0.3	0.20862	0.00108	0.046657	0.000383
19.9119	0.0001	139.3	0.4	0.29115	0.00145	0.046616	0.000368
19.9119	0.0001	178.9	0.4	0.38891	0.00184	0.044753	0.000314
29.9343	0.0001	59.6	0.3	0.18143	0.00116	0.048190	0.000551
29.9343	0.0001	99.8	0.3	0.31601	0.00151	0.046280	0.000361
29.9343	0.0001	139.3	0.4	0.45556	0.00211	0.044736	0.000338
29.9343	0.0001	178.9	0.4	0.59131	0.00264	0.044168	0.000299
49.832	0.001	59.6	0.3	0.31944	0.00158	0.045544	0.000456
49.832	0.001	99.8	0.3	0.54385	0.00250	0.044714	0.000343
49.832	0.001	139.3	0.4	0.76789	0.00339	0.044083	0.000325
49.832	0.001	178.9	0.4	0.99387	0.00430	0.043584	0.000291

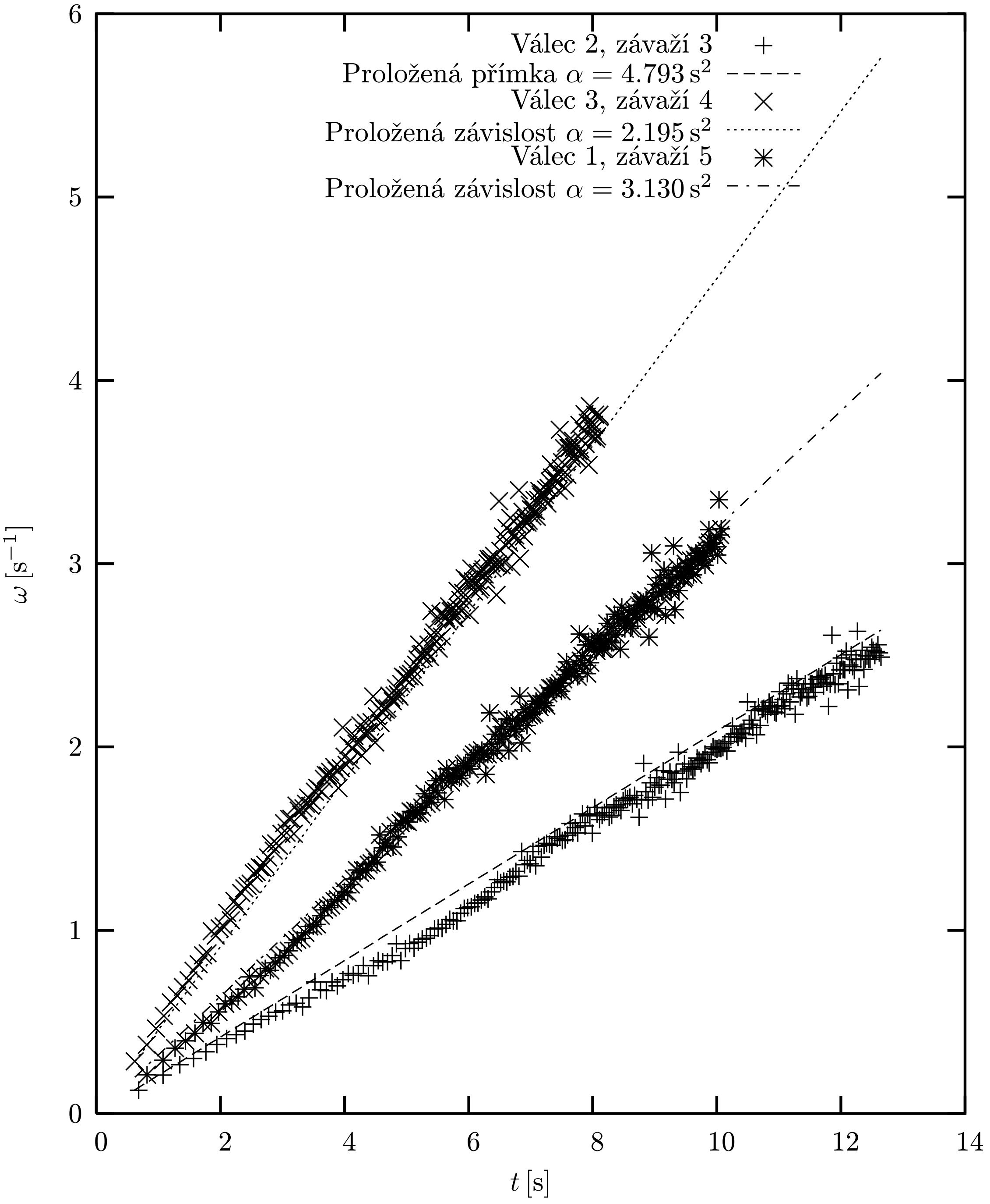
Tabulka 6.: Naměřené a vypočítané hodnoty pro metodu otáčení



Graf 1.: Závislost nekorigovaného momentu setrvačnosti I^* na parametru α

Diskuse

Na první pohled mě dosti zarazilo, že moment setrvačnosti měřený metodou kyvů vý-



Graf 2.: Závislost úhlové rychlosti na čase pro různé hodnoty parametru $\alpha = 1/\varepsilon$

borně odpovídá hodnotě korigovaného momentu při měření otáčením, ale tím se pochopitelně liší od hodnoty nekorigované. Původně jsem očekával opačný výsledek, nicméně pro to nemám žádné uspokojivé vysvětlení. Takové očekávání je naopak mylné. První problém spočívá v tom, že se jedná a rozdílné metody, a tím jejich chyby způsobené aproximací (neboť skutečné kolo je mnohem složitější než to, co popisuje náš model) se musí lišit. Korekce v případě měření otáčením korikuje chybu způsobenou třením při otáčení. Toto tření však nemá rozhodující vliv na měření metodou kyvů, kde měříme periodu kývání, která na tření nezávisí. Zde se ukazuje velmi užitečné měřit kmity vždy při průchodu rovnovážnou polohou a ne v krajní poloze, protože právě to odstraňuje vliv tření. Z tohoto důvodu metoda kyvů vlastně korekci tření vůbec nepotřebuje a musí odpovídat výsledku korigovaného momentu setrvačnosti při měření metodou otáčení. Na druhou stranu chyba měření dává dostatečný prostor pro jinou možnou interpretaci.

Závěr

Moment setrvačnosti kola měřený metodou kyvů je

$$I = (42.5 \pm 3.1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2},$$

metodou otáčení po korekci momentů třecích sil je

$$I_k = (42.5 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Vzhledem k vysvětlení uvedenému v diskusi považuji toto měření za úspěšné.

Literatura

[1] Studijní texty, úloha XIII. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/`
[2] Englich, J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření. Praha 2000.