## Pracovní úkol

1. Změřte modul pružnosti v tahu $E$ oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu $E$ oceli a duralu z průhybu trámku.
3. Výsledky měření zpracujte užitím lineární regrese.
4. Výsledky měření graficky znázorněte.

## Teoretická část

Působí-li na drát délky $l_0$ a průřezu $S$ síla $F$, potom v oboru pružné deformace je prodloužení drátu $\Delta l$ dáno výrazem

$$\Delta l = \frac{l_0 F}{ES}, \tag{1}$$

kde $E$ je modul pružnosti v tahu, který udává poměr mezi napětím $\sigma$

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{2}$$

a relativním prodloužením $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{3}$$

Pro výpočet modulu pružnosti v tahu napínáme zkoumaný drát délky $l_0$ známou silou $F$, která je realizovaná pomocí závaží zavěšeného přes kladku na volný konec drátu. Při změně síly $F$ se kladka pootočí o malý úhel $\Delta\alpha$. Na ose kladky je připevněno zrcátko, přes které pomocí dalekohledu s ryskou pozorujeme stupnici ve vzdálenosti $L$. Odečteme-li při počátečním vyrovnávacím zatížení na stupnici hodnotu $n_0$ a po změně síly odečteme $n$, drátek se silou protáhl o vzdálenost

$$\Delta l = \frac{d_k}{2} \cdot \frac{n_0 - n}{2L}, \tag{4}$$

je-li pootočení dostatečně malé a průměr kladky je $d_k$.

Pro výpočet modulu pružnosti dále potřebujeme znát průřez drátu, který vypočítáme z jeho průměru $d_d$ podle vztahu

$$S = \frac{\pi d_d^2}{4}. \tag{5}$$

Při měření modulu pružnosti z průhybu umístíme trámek obdélníkového průřezu na dva břity ve vzdálenosti $l$. Výška trámku je $b$, šířka $a$. Trámek zatěžujeme uprostřed silou $F$ a měříme v tomto místě jeho průhyb $\Delta y$. Ze znalosti těchto hodnot již můžeme vypočítat modul pružnosti v tahu

$$E = \frac{F l^3}{4 \Delta y a b^3}. \tag{6}$$

V obou případech je modul pružnosti vypočítán pomocí lineární regrese. Vzhledem k výše uvedeným vztahům hledáme závislost ve tvaru $y = ax$, kde

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \tag{7}$$

Pro určení chyby měření jsou použity následující vztahy. Směrodatná odchylka aritmetického průměru ($a$ a $b$)

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\mu_x - x_i)^2}. \tag{8}$$

Určíme-li pro jednu veličinu více různých odchylek, celková je

$$\Delta x = \sqrt{\sum_i (\Delta_i x)^2}. \tag{9}$$

Odchylka při výpočtu z regrese

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}. \tag{10}$$

**Měření**

| | $d_d$ [mm] | $l_0$ [m] | $d_k$ [mm] | $L$ [m] |
|---|---|---|---|---|
| Průměr | 0.501 | 1.160 | 38.4 | 0.997 |
| Odchylka | 0.001 | 0.005 | 0.1 | 0.001 |

| $m$ [kg] | $n$ [m] | $n_0 - n$ [m] | $\Delta l$ [m] | $\varepsilon$ | $\sigma$ [Pa] |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.188 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0.10 | 0.184 | 0.004 | $3.852 \cdot 10^{-5}$ | $3.320 \cdot 10^{-5}$ | $4.975 \cdot 10^{6}$ |
| 0.20 | 0.183 | 0.005 | $4.814 \cdot 10^{-5}$ | $4.150 \cdot 10^{-5}$ | $9.949 \cdot 10^{6}$ |
| 0.30 | 0.178 | 0.010 | $9.629 \cdot 10^{-5}$ | $8.301 \cdot 10^{-5}$ | $1.492 \cdot 10^{7}$ |
| 0.40 | 0.175 | 0.013 | $1.252 \cdot 10^{-4}$ | $1.079 \cdot 10^{-4}$ | $1.990 \cdot 10^{7}$ |
| 0.50 | 0.172 | 0.016 | $1.541 \cdot 10^{-4}$ | $1.328 \cdot 10^{-4}$ | $2.487 \cdot 10^{7}$ |
| 0.60 | 0.169 | 0.019 | $1.829 \cdot 10^{-4}$ | $1.577 \cdot 10^{-4}$ | $2.985 \cdot 10^{7}$ |
| 0.70 | 0.166 | 0.022 | $2.118 \cdot 10^{-4}$ | $1.826 \cdot 10^{-4}$ | $3.482 \cdot 10^{7}$ |
| 0.80 | 0.162 | 0.026 | $2.504 \cdot 10^{-4}$ | $2.158 \cdot 10^{-4}$ | $3.980 \cdot 10^{7}$ |
| 0.90 | 0.160 | 0.028 | $2.696 \cdot 10^{-4}$ | $2.324 \cdot 10^{-4}$ | $4.477 \cdot 10^{7}$ |
| 1.00 | 0.156 | 0.032 | $3.081 \cdot 10^{-4}$ | $2.656 \cdot 10^{-4}$ | $4.975 \cdot 10^{7}$ |
| 0.90 | 0.160 | 0.028 | $2.696 \cdot 10^{-4}$ | $2.324 \cdot 10^{-4}$ | $4.477 \cdot 10^{7}$ |
| 0.80 | 0.163 | 0.025 | $2.407 \cdot 10^{-4}$ | $2.075 \cdot 10^{-4}$ | $3.980 \cdot 10^{7}$ |
| 0.70 | 0.166 | 0.022 | $2.118 \cdot 10^{-4}$ | $1.826 \cdot 10^{-4}$ | $3.482 \cdot 10^{7}$ |
| 0.60 | 0.168 | 0.020 | $1.926 \cdot 10^{-4}$ | $1.660 \cdot 10^{-4}$ | $2.985 \cdot 10^{7}$ |
| 0.50 | 0.172 | 0.016 | $1.541 \cdot 10^{-4}$ | $1.328 \cdot 10^{-4}$ | $2.487 \cdot 10^{7}$ |
| 0.40 | 0.175 | 0.013 | $1.252 \cdot 10^{-4}$ | $1.079 \cdot 10^{-4}$ | $1.990 \cdot 10^{7}$ |
| 0.30 | 0.178 | 0.010 | $9.629 \cdot 10^{-5}$ | $8.301 \cdot 10^{-5}$ | $1.492 \cdot 10^{7}$ |
| 0.20 | 0.181 | 0.007 | $6.740 \cdot 10^{-5}$ | $5.811 \cdot 10^{-5}$ | $9.949 \cdot 10^{6}$ |
| 0.10 | 0.184 | 0.004 | $3.852 \cdot 10^{-5}$ | $3.320 \cdot 10^{-5}$ | $4.975 \cdot 10^{6}$ |
| 0.00 | 0.187 | 0.001 | $9.629 \cdot 10^{-6}$ | $8.301 \cdot 10^{-6}$ | 0.000 |

Odchylka $n = 2$ [mm]

**Tabulka 1.:** Naměřené a vypočítané hodnoty pro ocelový drát

Naměřené hodnoty pro ocelový drát jsou uvedeny v tabulce 1. Hmotnosti závaží, která napínala drát, jsou uvedeny v pořadí, v jakém bylo měření prováděno. Tím můžeme ovšřit, že při měření nedošlo k plastické deformaci drátu, neboť se po uvolnění vrátil do původní polohy. Pokud by tomu tak nebylo, nemohli bychom použít tato data pro výpočty podle teoretické části. V grafu 1 je potom vynesena závislost napětí na relativním prodloužení. V takovém případě je modul pružnosti přímo směrnice tečny regresní přímky.

Pro přesnost je potřeba zmínit i jistou komplikaci při měření délky $l_0$. Drát doléhá na kladku po délce jedné čtvrtiny jejího obvodu. Není však zřejmé, která část drátu se při zatěžování vůči kladce nepohybuje. To zřejmě závisí na smykovém tření mezi drátem a kladkou. Pro potřeby měření jsem tuto polohu odhadl jako místo v polovině dotyku, tedy pod úhlem 45 stupňů od svislice. S ohledem na tuto skutečnost jsem volil větší odchadnutou chybu měření.

Při měření z průhybu trámku se postupuje obdobně. Trámek se postupně zatěžuje a potom opět uvolňuje, tak aby bylo možné ověřit, že se vrátil do původní polohy. Parametry $a$ a $b$ jsem měřil opakovaně v různých místech vzhldem k jeho mírné nepravidelnosti. Na druhou stranu jsem tato měření provedl především ve střední části, která má největší vliv na průhyb trámku. Naměřené a vypočítané hodnoty jsou v tabulkách 2 a 3.

Výsledky regresního výpočtu modulu pružnosti jsou uvedeny v tabulce 4. Odchylka je vypočítaná podle vztahu (10).

| Veličina | Naměřená hodnota | Tabulková hodnota |
|---|---|---|
| Modul pružnosti oceli (drát) | $(188.3 \pm 1.4)$ GPa | 200 až 210 GPa |
| Modul pružnosti oceli (trámek) | $(202.4 \pm 0.3)$ GPa | 200 až 210 GPa |
| Modul pružnosti duralu | $(68.31 \pm 0.11)$ GPa | 72.5 GPa |

**Tabulka 4.:** Shrnutí výsledků s použitím chyby regrese

Měření bylo provedeno při teplotě $t = 22.8\,^\circ\mathrm{C}$.

## Diskuse

Srovnáme-li naměřené hodnoty s tabulkovými, zjistíme, že neleží v rozsahu odchylky. Je však potřeba se zamyslet nad tím, co vyjadřuje uvedená odchylka. Ta totiž vůbec nebere v úvahu chybu vstupních dat. Je počítána pouze z čtverců vzdáleností naměřených bodů od regresní přímky. Tím však nemůže pojmout především chyby systematické způsobené chybou měřidel. Z tabulek 1 až 3 je zřejmé, že tyto chyby jsou v procentech o jeden řád vyšší. Z tohoto důvodu je potřeba tuto chybu aespoň odhadnout. Vstupní hodnoty ve výpočtech vystupují v součinech, a proto považuji jako rozumné sečíst relativní chyby vstupních dat vynásobené mocninou, ve které se ve výpočtu objevují. Pro ocelový drát dostávám odhad

$$\delta E = 2\delta d_d + \delta d_k + \delta l_0 + \delta n + \delta L = 2.4\,\%,$$

pro ocelový hranol

$$\delta E = \delta y + \delta a + 3\delta b + \delta l = 3.3\,\%, \text{ a pro dural } \delta E = 2.3\,\%.$$

Pokud tyto hodnoty přičteme k chybě z regrese, dostáváme nové výsledky uvedené v tabulce 5. Je zřejmé, že tato celková chyba mnohem více odpovídá způsobu měření

| | $a$ [mm] | $b$ [mm] | $l$ [m] |
|---|---|---|---|
| | 11.8 | 2.97 | |
| | 11.9 | 2.96 | |
| | 11.8 | 2.97 | |
| | 12.0 | 2.96 | |
| | 11.9 | 2.96 | |
| Aritmet. průměr | 11.88 | 2.964 | 0.410 |
| Směrodatná odchylka | 0.037417 | 0.002449 | |
| Chyba měřidla | 0.1 | 0.01 | 0.001 |
| Celková chyba | 0.106771 | 0.010296 | 0.001 |

| $m$ [kg] | $y$ [mm] | $\Delta y$ [mm] | $4yab^3/l^3$ [$m^2$] | $F$ [N] |
|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 3.55 | 0.00 | 0.000 | 0.0000 |
| 0.10 | 3.82 | 0.27 | $4.848 \cdot 10^{-12}$ | 0.9807 |
| 0.20 | 4.09 | 0.54 | $9.695 \cdot 10^{-12}$ | 1.9613 |
| 0.30 | 4.35 | 0.80 | $1.436 \cdot 10^{-11}$ | 2.9420 |
| 0.40 | 4.63 | 1.08 | $1.939 \cdot 10^{-11}$ | 3.9227 |
| 0.50 | 4.90 | 1.35 | $2.424 \cdot 10^{-11}$ | 4.9033 |
| 0.60 | 5.18 | 1.63 | $2.926 \cdot 10^{-11}$ | 5.8840 |
| 0.70 | 5.44 | 1.89 | $3.393 \cdot 10^{-11}$ | 6.8647 |
| 0.80 | 5.70 | 2.15 | $3.860 \cdot 10^{-11}$ | 7.8453 |
| 0.70 | 5.43 | 1.88 | $3.375 \cdot 10^{-11}$ | 6.8647 |
| 0.60 | 5.18 | 1.63 | $2.926 \cdot 10^{-11}$ | 5.8840 |
| 0.50 | 4.91 | 1.36 | $2.442 \cdot 10^{-11}$ | 4.9033 |
| 0.40 | 4.62 | 1.07 | $1.921 \cdot 10^{-11}$ | 3.9227 |
| 0.30 | 4.37 | 0.82 | $1.472 \cdot 10^{-11}$ | 2.9420 |
| 0.20 | 4.10 | 0.55 | $9.875 \cdot 10^{-12}$ | 1.9613 |
| 0.10 | 3.83 | 0.28 | $5.027 \cdot 10^{-12}$ | 0.9807 |
| 0.00 | 3.56 | 0.01 | $1.795 \cdot 10^{-13}$ | 0.0000 |

Odchylka $y = 0.05$ [mm]

**Tabulka 2.:** Naměřené a vypočítané hodnoty pro ocelový trámek

než původní chyba čistě z regrese. I přes tento odhad chyby se však nepodařilo dosáhnout překrytí intervalů ohraničených chybami obou měření modulu pružnosti pro ocel. Může to být způsobené nevhodnou volbou způsobu odhadu chyby, v horším případě systematickou chybou, kterou však neznám.

| Veličina | Naměřená hodnota | Tabulková hodnota |
|---|---|---|
| Modul pružnosti oceli (drát) | $(188.3 \pm 6.0)$ GPa | 200 až 210 GPa |
| Modul pružnosti oceli (trámek) | $(202.4 \pm 6.9)$ GPa | 200 až 210 GPa |
| Modul pružnosti duralu | $(68.3 \pm 1.7)$ GPa | 72.5 GPa |

**Tabulka 5.:** Shrnutí výsledků s použitím odhadnuté chyby

## Závěr

Naměřené hodnoty modulu pružnosti v tahu pro ocel a dural jsou shrnuty v tabulce

| | $a$ [mm] | $b$ [mm] | $l$ [m] |
|---|---|---|---|
| | 11.4 | 2.92 | |
| | 11.2 | 2.91 | |
| | 11.3 | 2.92 | |
| | 11.4 | 2.91 | |
| | 11.2 | 2.91 | |
| Aritmetický průměr | 11.3 | 2.914 | 0.410 |
| Smerodatná odchylka | 0.044721 | 0.002449 | |
| Chyba měřidla | 0.1 | 0.01 | 0.001 |
| Celková chyba | 0.109545 | 0.010296 | 0.001 |

| $m$ [kg] | $y$ [mm] | $\Delta y$ [mm] | $4yab^3/l^3$ [m$^2$] | $F$ [N] |
|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 4.73 | 0.00 | 0.000 | 0.0000 |
| 0.05 | 5.19 | 0.46 | $7.464 \cdot 10^{-12}$ | 0.4903 |
| 0.10 | 5.61 | 0.88 | $1.428 \cdot 10^{-11}$ | 0.9807 |
| 0.15 | 6.07 | 1.34 | $2.175 \cdot 10^{-11}$ | 1.4710 |
| 0.20 | 6.50 | 1.77 | $2.872 \cdot 10^{-11}$ | 1.9613 |
| 0.25 | 6.94 | 2.21 | $3.586 \cdot 10^{-11}$ | 2.4517 |
| 0.30 | 7.38 | 2.65 | $4.300 \cdot 10^{-11}$ | 2.9420 |
| 0.35 | 7.82 | 3.09 | $5.014 \cdot 10^{-11}$ | 3.4323 |
| 0.30 | 7.37 | 2.64 | $4.284 \cdot 10^{-11}$ | 2.9420 |
| 0.25 | 6.94 | 2.21 | $3.586 \cdot 10^{-11}$ | 2.4517 |
| 0.20 | 6.51 | 1.78 | $2.889 \cdot 10^{-11}$ | 1.9613 |
| 0.15 | 6.08 | 1.35 | $2.191 \cdot 10^{-11}$ | 1.4710 |
| 0.10 | 5.61 | 0.88 | $1.428 \cdot 10^{-11}$ | 0.9807 |
| 0.05 | 5.18 | 0.45 | $7.302 \cdot 10^{-12}$ | 0.4903 |
| 0.00 | 4.72 | $-0.01$ | $-1.623 \cdot 10^{-13}$ | 0.0000 |

Odchylka $y = 0.05$ [mm]

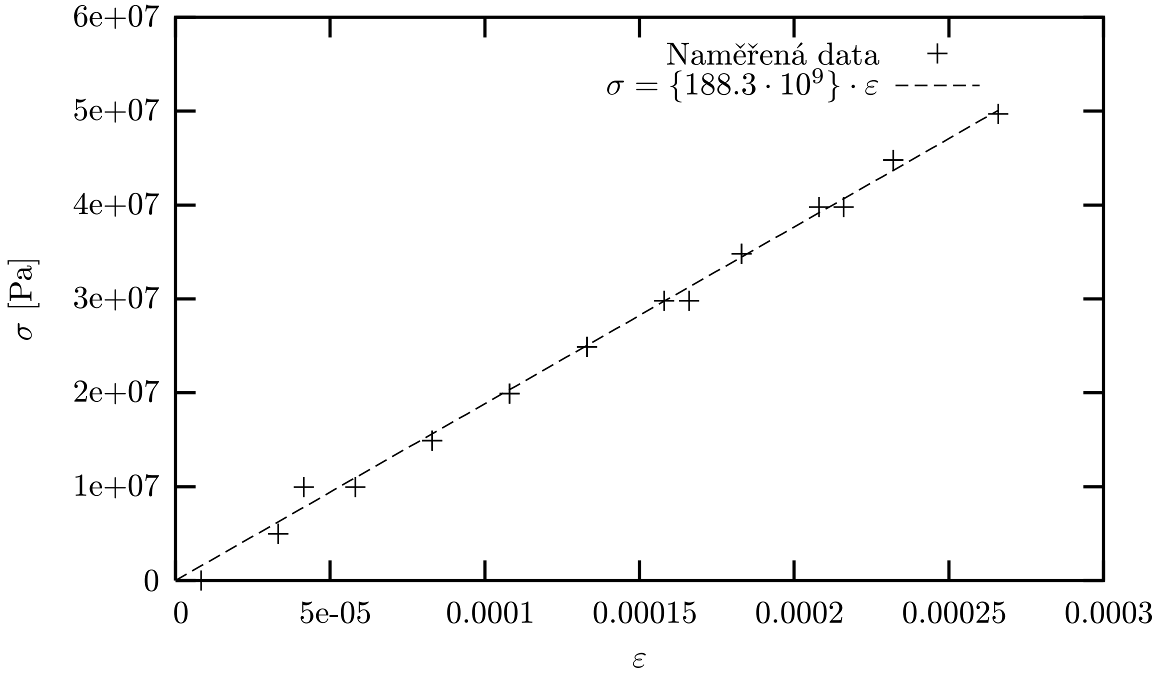
**Tabulka 3.:** Naměřené a vypočítané hodnoty pro duralový trámek

5. Tyto hodnoty víceméně odpovídají tabulkovým, je-li mnou navržený odhad chyby korektní.

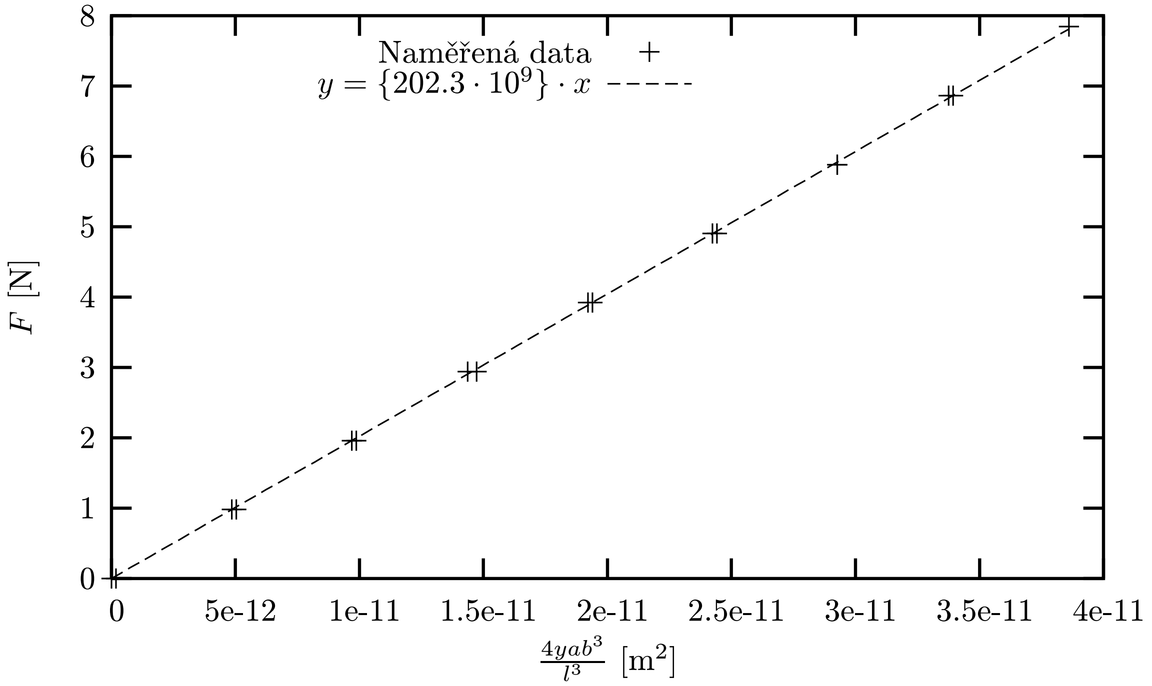
## Literatura


[1] Studijní texty, úloha IX. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/`
[2] Englich, J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření. Praha 2000.
[3] Brož, J., Roskovec, V., Valouch, M.: Fyzikální a matematické tabulky. SNTL, Praha 1980.

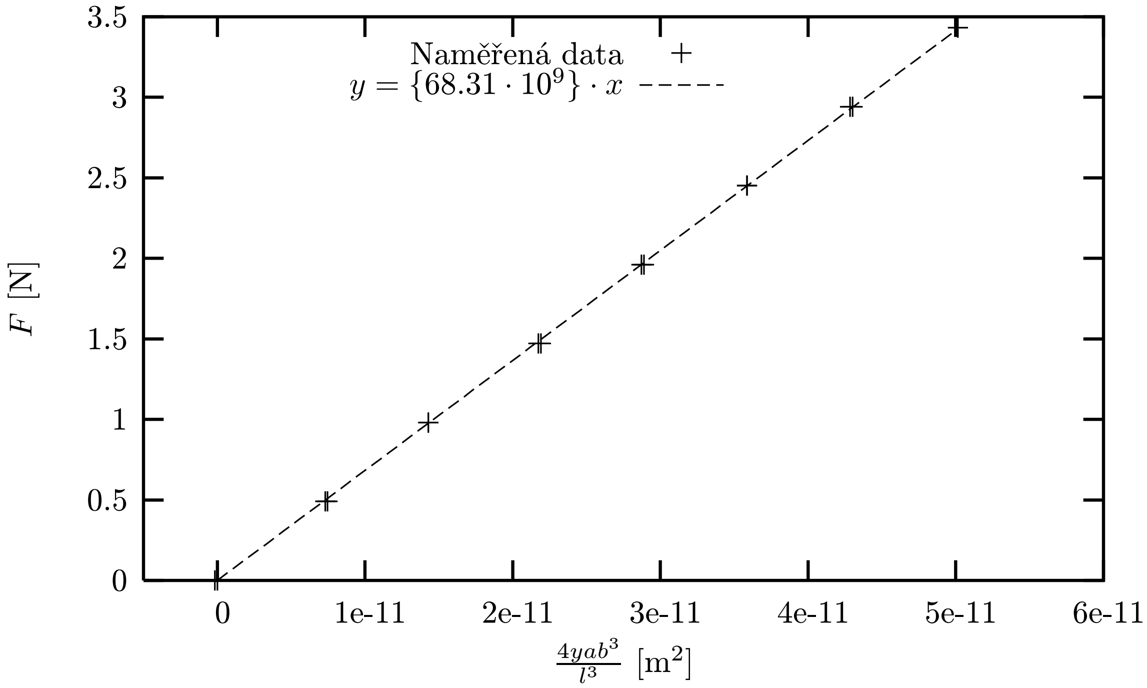

## Příloha: grafy




**Graf 1.:** Závislost napětí na relativním prodloužení ocelového drátu a regresní přímka




**Graf 2.:** Závislost síly na průhybu pro ocelový trámek




**Graf 3.:** Závislost síly na průhybu pro duralový trámek