Úkol

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
2. Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách
   a. $y_1 = y_2 = B \ldots$ doba kmitu T_1.
   b. $y_1 = -y_2 = B \ldots$ doba kmitu T_2.
   c. $y_1 = 0;\ y_2 = B \ldots$ doba kmitu T_3 a doba $T_4/2$, za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly.
3. Vypočtěte kruhové frekvence ω_0 až ω_4 odpovídající dobám T_0 až T_4. Ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro 3 a 4.
4. Vypočtěte stupeň vazby.
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

Teoretická část

Pohybové rovnice pro zadané počáteční podmínky jsou
a. $\Phi_1 = \Phi_2 = A\cos\omega_0 t$
b. $\Phi_1 = -\Phi_2 = A\cos\omega_1 t$
c. $\Phi_1 = A\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)t\cdot\sin\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_1)t$ a $\Phi_2 = A\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)t\cdot\cos\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_1)t$
Je-li vazba slabá (ω_2 se málo liší od ω_1), lze obě rovnice interpretovat tak, že obě kyvadla kmitají se stejnou frekvencí

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_2+\omega_1)$$

a amplitudy jejich pohybu se periodicky mění s časem při frekvenci

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)$$

Vztah mezi periodou a úhlovou frekvencí je

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Pro stupeň vazby platí vzorec

$$\kappa = \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2}$$

a odchylku vypočítáme vzorcem sestaveným podle [2]

$$\Delta\kappa = 4\omega_1\omega_2\frac{\Delta\omega_1\cdot\omega_1+\Delta\omega_2\cdot\omega_2}{(\omega_2^2+\omega_1^2)^2}.$$

Měření

Měření bylo provedeno pro dvě pružiny, které budu důsledně nazývat kratší a delší, neboť neměly žádné označení. Delší pružina byla umístěna ve vzdálenosti $l = (10.0 \pm 0.2)$ cm od závěsu kyvadel, kratší pružina pak ve vzdálenosti $l = (23.5 \pm 0.2)$ cm. Závislost stupně vazby na poloze pružiny jsem měřil pouze pro delší pružinu.

Periody T_0 až T_3 jsem měřil vždy jen dvakrát, protože statistická chyba je v tomto měření zanedbatelně menší oproti odhadnuté, což je moje reakční doba 0.2 s. Vzhledem k nepřiznivému poměru velikosti těchto veličin a mé reakční doby jsem měři vždy deset kmitů. V tabulkách však uvádím vždy již skutečnou délku periody (tedy po vydělení naměřené hodnoty deseti). V případě určování T_4 je situace právě opačná. Zde téměř nemá vliv má reakční doba, ale rozhodující je dobré vystižení okamžiku, kdy je kyvadlo v klidu (tedy kdy došlo k úplnému předání energie). To přináší statistickou chybu. Proto bylo provedeno vždy pět měření a zpracováno aritmetickým průměrem a směrodatnou odchylkou aritmetického průměru.

Počáteční výchylku B jsem nastavoval zpravidla 3 až 4 centimetry, aby byla splněna podmínka malých kmitů a zároveň byly kmity měřitelné.

Všechny naměřené a vypočítané hodnoty jsou uvedené v tabulkách 1 až 7.

V tabulce 6 jsou vždy hodnoty T_{1i} dvě měření periody T_1, která je aritmetickým průměrem naměřených hodnot. Totéž platí pro 2.

Stupeň vazby pro měření s delší pružinou je $\kappa = (0.013 \pm 0.021)$, pro měření s kratší pružinou $\kappa = (0.025 \pm 0.021)$.

	Kyvadlo 1		Kyvadlo 2	
	T_0 [s]	ω_0 [s^{-1}]	T_0 [s]	ω_0 [s^{-1}]
	1.914		1.912	
	1.910		1.915	
Průměr	1.91	3.29	1.91	3.28
Odchylka	0.02	0.03	0.02	0.03

Tabulka 1.: Doba kmitu T_0 nevázaných kyvadel a jejich úhlová frekvence

	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	$T_4/4$ [s]
	1.914	1.888	1.903	65.75
	1.913	1.888	1.906	63.27
				62.82
				62.75
				61.95
Průměr	1.91	1.89	1.91	63.3
Odchylka	0.02	0.02	0.02	0.7

Tabulka 2.: Doba kmitů vázaných kyvadel delší pružinou

Teplota	24.5 °C
Tlak vzduchu	969.1 hPa
Relativní vlhkost	37.0 %

Tabulka 7.: Podmínky v laboratoři v době měření

	T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	$T_4/4$ [s]
	1.914	1.873	1.894	47.51
	1.918	1.863	1.889	46.74
				51.80
				54.90
				47.28
Průměr	1.92	1.87	1.89	49.6
Odchylka	0.02	0.02	0.02	1.8

Tabulka 3.: Doba kmitů vázaných kyvadel kratší pružinou

Veličina	Naměřená	Teoretická
ω_1 [s^{-1}]	3.28 ± 0.03	
ω_2 [s^{-1}]	3.33 ± 0.04	
ω_3 [s^{-1}]	3.30 ± 0.04	3.31 ± 0.04
ω_4 [s^{-1}]	$(24.8 \pm 0.3)10^{-3}$	$(22 \pm 35)10^{-3}$

Tabulka 4.: Porovnání naměřených a teoretických hodnot frekvence pro měření s delší pružinou

Veličina	Naměřená	Teoretická
ω_1 [s^{-1}]	3.28 ± 0.03	
ω_2 [s^{-1}]	3.36 ± 0.04	
ω_3 [s^{-1}]	3.32 ± 0.04	3.31 ± 0.04
ω_4 [s^{-1}]	$(31.6 \pm 1.1)10^{-3}$	$(42 \pm 35)10^{-3}$

Tabulka 5.: Porovnání naměřených a teoretických hodnot frekvence pro měření s kratší pružinou

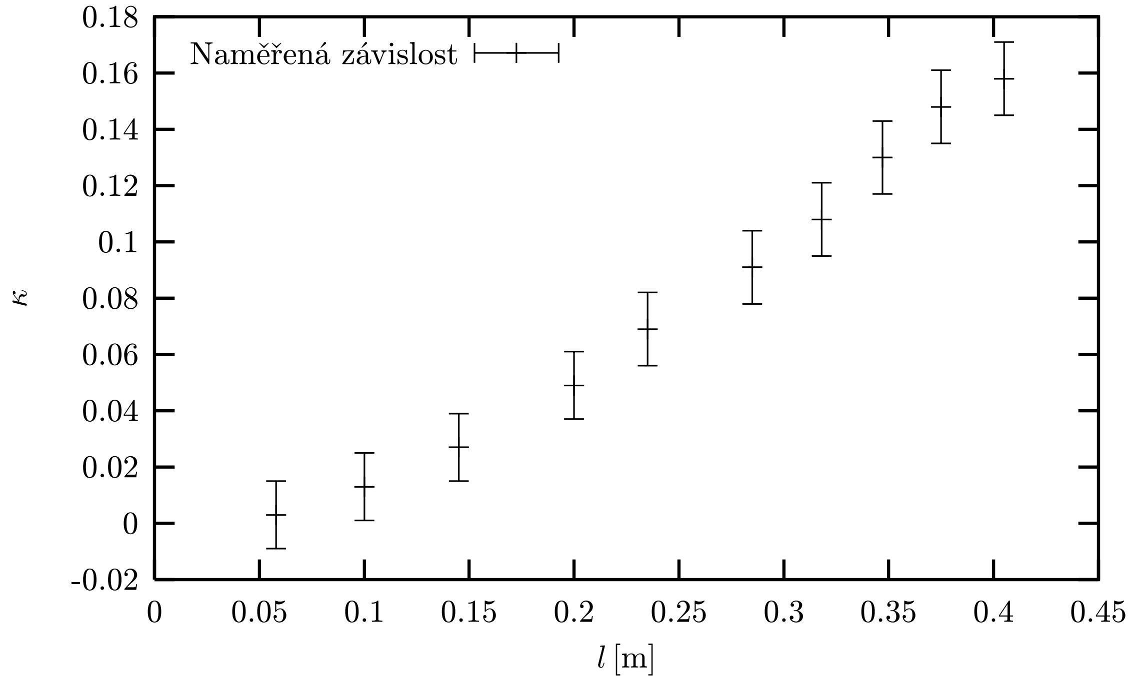
l [m]	T_{11} [s]	T_{12} [s]	T_1 [s]	T_{21} [s]	T_{22} [s]	T_2 [s]	ω_1 [s^{-1}]	ω_2 [s^{-1}]	κ	$\Delta\kappa$
0.058	1.914	1.917	1.915	1.909	1.910	1.909	3.280	3.290	0.003	0.012
0.100	1.913	1.914	1.913	1.888	1.888	1.888	3.284	3.328	0.013	0.012
0.145	1.910	1.911	1.910	1.862	1.859	1.860	3.289	3.377	0.027	0.012
0.200	1.915	1.906	1.910	1.818	1.821	1.820	3.289	3.453	0.049	0.012
0.235	1.916	1.910	1.913	1.785	1.786	1.785	3.284	3.519	0.069	0.013
0.285	1.908	1.909	1.909	1.743	1.740	1.741	3.292	3.608	0.091	0.013
0.318	1.908	1.908	1.908	1.709	1.716	1.712	3.293	3.669	0.108	0.013
0.347	1.905	1.908	1.906	1.674	1.671	1.672	3.296	3.757	0.130	0.013
0.375	1.913	1.912	1.913	1.651	1.643	1.647	3.285	3.815	0.148	0.013
0.405	1.912	1.910	1.911	1.630	1.629	1.629	3.288	3.856	0.158	0.013

Tabulka 6.: Závislost stupně vazby na vzálenosti zavěšení pružiny pro delší pružinu

Diskuze

Na základě hodnot z tabulky 1 je patrné, že byla splněna základní podmínka úlohy, že frekvence nevázaných kyvadel se musí shodovat, což platí v rámci chyby měření.

Vztahy pro výpočet ω_3 a ω_4 jsou pro obě měření splněny v rozsahu chyby měření, nicméně zvláště v případě ω_4 je chyba natolik velká (odečítáme dvě málo odlišná čísla), že lze jen těžko mluvit o ověření vztahu.



Graf 1.: Naměřená závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny pro delší pružinu

Chyba měření stupně vazby je velmi vysoká. Je to způsobeno nevhodně zvolenou, příliš slabou, vazbou. Chyba by byla menší, pokud bych snížil odhadnutou chybu měření periody (reakční doba), případně kdybych měřil více kmitů než deset, což by však příliš prodloužilo měření.

Závěr

Hodnoty naměřených a teoretických úhlových frekvencí jsou shrnuty v tabulkách 4 a 5.

Graf závislosti stupně vazby na poloze pružiny je graf 1.

Vztahy, které měly být ověřeny, se podařilo alespoň splnit, pro jejich ověření jsou tato měření příliš nepřesná.

Literatura

[1] Studijní texty, úloha VII. `http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/`

[2] Englich, J.: Zpracování výsledků fyzikálních měření. Praha 2000.